PROCEDIMIENTOS EN R^3

Ecuaciones paramétricas de la recta r

$\boxed{\text{r1}}$ Pasa por el punto $A(A_x, A_y, A_z)$
De vector director $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$

Con un punto y un vector encontramos las ecuaciones paramétricas o continuas de la recta r

$$r \equiv \begin{cases} x = A_x + \lambda u_x \\ y = A_y + \lambda u_y \\ z = A_z + \lambda u_z \end{cases} \quad \vee \quad r \equiv \frac{x - A_x}{u_x} = \frac{y - A_y}{u_y} = \frac{z - A_z}{u_z} \quad (u_x \neq 0 \wedge u_y \neq 0 \wedge u_y \neq 0)$$

$\boxed{\text{r2}}$ Pasa por el punto $A(A_x, A_y, A_z)$
Pasa por el punto $B(B_x, B_y, B_z)$

El vector director es $\vec{u} \parallel \overrightarrow{AB} = (B_x - A_x, B_y - A_y, B_z - A_z) \quad \longrightarrow \quad \boxed{\text{r1}}$

$\boxed{\text{r3}}$ Pasa por el punto $A(A_x, A_y, A_z)$
Perpendicular al plano $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0.$

El vector director es $\vec{u} \parallel \vec{n} = (a, b, c) \quad \longrightarrow \quad \boxed{\text{r1}}$

Si r es perpendicular a π y $\vec{n}$ es el vector normal (perpendicular) a π, entonces $\vec{n}$ es un vector paralelo a r, $\vec{n}$ es un vector director de r

$\boxed{\text{r4.1}}$ Intersección del plano $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$
y el plano $\pi' \equiv a'x + b'y + c'z + d' = 0$

Obtenemos directamente las ecuaciones implícitas para la recta r

$$r \equiv \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + a'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Las ecuaciones paramétricas de r son la solución del SCI, con un parámetro libre λ ($x \vee y \vee z$).

$\boxed{\text{r4.2}}$ De otra manera:

Buscamos por inspección un punto $A(A_x, A_y, A_z)$ de la recta r, solución del SCI de $\boxed{\text{r4.1}}$

El vector director es $\vec{u} \parallel (\vec{n} \times \vec{n}') = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\text{r1}}$

Si r está en el plano π, el vector $\vec{n}$ normal al plano es perpendicular al vector $\vec{u}$ director de la recta. Lo mismo con el otro plano. Entonces $\vec{u}$ es perpendicular a ambos vectores normales, paralelo al producto vectorial de ambos.

$\boxed{\text{r5}}$ Perpendicular y secante a la recta s, de vector director $\vec{v}$
Perpendicular y secante a la recta s', de vector director $\vec{v}\,'$
s y s' son secantes (r es la perpendicular común)

Hallamos el punto de intersección A de r con s $\longrightarrow$ $\boxed{\text{i1,i2,i3}}$

Haciendo que la recta r pase por A, r es secante a ambas rectas s y s'.

El vector director es $\vec{u} \parallel (\vec{v} \times \vec{v}\,')$ $\longrightarrow$ $\boxed{\text{r1}}$

Si r es perpendicular a s, sus vectores directores también lo son. Lo mismo con s'. Entonces $\vec{u}$ es perpendicular a ambos vectores directores, paralelo al producto vectorial de ambos.

$\boxed{\text{r6.1}}$ Perpendicular y secante a la recta s, de vector director $\vec{v}$
Perpendicular y secante a la recta s', de vector director $\vec{v}\,'$
s y s' se cruzan (r es la perpendicular común)

Sean $A(A_x + \lambda u_x, A_y + \lambda u_y, A_z + \lambda u_z) \in r \quad \wedge \quad B(B_x + \mu v_x, A_y + \mu v_y, A_z + \mu v_z) \in s$

Puntos genéricos en cada recta.

La recta buscada r pasa por A y B y tiene vector director $\vec{u} \parallel \overrightarrow{AB}$ si $\overrightarrow{AB}$ es perpendicular a $\vec{v}$ y a $\vec{v}\,'$ a la vez, es decir, los siguientes productos escalares son nulos:

$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = 0 \quad \wedge \quad \overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}\,' = 0$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (λ, μ), hallamos los puntos A y B por los que pasa la recta buscada r $\longrightarrow$ $\boxed{\text{r2}}$

$\boxed{\text{r6.2}}$ De otra manera:

El vector director de la recta buscada r es $\vec{u} \parallel (\vec{v} \times \vec{v}\,')$

Encontramos el plano π que contiene a las rectas s y r (perpendicular a s'). Sus vectores directores son $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y todos los puntos de s están en el plano $\longrightarrow$ $\boxed{\text{p1.1}}$

Encontramos el plano π' que contiene a las rectas s' y r (perpendicular a s). Sus vectores directores son $\vec{u}$ y $\vec{v}\,'$ y todos los puntos de s' están en el plano $\longrightarrow$ $\boxed{\text{p1.1}}$

La intersección de los dos planos es la recta buscada r $\longrightarrow$ $\boxed{\text{r4}}$

Verifica la ecuación del planos π (es perpendicual a s' y pasan por s) y también la del plano π' (es perpendicular a s y pasa por s')

$\boxed{\text{r7}}$ Pasa por el punto $A(A_x, A_y, A_z)$
Paralela a la recta s de vector director $\vec{v}$ $[\vec{v} \parallel s]$

El vector director es $\vec{u} \parallel \vec{v}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\text{r1}}$

Ecuaciones implícitas del plano π

$\boxed{\text{p1.1}}$ Pasa por el punto $A(A_x, A_y, A_z)$
De vector director $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$
De vector director $\vec{v} = (u_x, u_y, u_z)$

Sea $P(x, y, z)$ un punto genérico del plano π

Los vectores $\{\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \vec{v}\}$ son coplanarios $\Rightarrow$

El vector $\overrightarrow{AP} = (x - A_x, y - A_y, z - A_z)$ es combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ $\Rightarrow$

El determinante de sus componentes es nulo:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x - Ax & u_x & v_x \\ y - A_y & u_y & v_y \\ z - A_z & u_z & v_z \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi \equiv ax + by + cz + d = 0$$

$\boxed{\text{p1.2}}$ De otra manera:

El vector $\vec{n} = (a, b, c) \parallel (\vec{u} \times \vec{v})$ es el vector normal al plano.

Sea $P(x, y, z)$ un punto genérico del plano π

Los vectores $\vec{n}$ y $\overrightarrow{AP} = (x - A_x, y - A_y, z - A_z)$ son perpendiculares $\Rightarrow$

Su producto escalar es nulo $\vec{n} \cdot \overrightarrow{Ap} = a(x - A_x) + b(y - A_y) + c(z - A_z) = 0$

Que es la ecuación normal del plano $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$

$\boxed{\text{p2}}$ Pasa por el punto $A(A_x, A_y, A_z)$
Pasa por el punto $B(B_x, B_y, B_z)$
De vector director $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$

El vector $\overrightarrow{AB} = (B_x - A_x, B_y - A_y, B_z - A_z)$ es el otro vector director de π $\longrightarrow$ $\boxed{\text{p1}}$

$\boxed{\text{p3}}$ Pasa por el punto $A(A_x, A_y, A_z)$
Pasa por el punto $B(B_x, B_y, B_z)$
Pasa por el punto $C(C_x, C_y, C_z)$

El vector $\overrightarrow{AB} = (B_x - A_x, B_y - A_y, B_z - A_z)$ es un vector director de π

El vector $\overrightarrow{AC} = (C_x - A_x, C_y - A_y, C_z - A_z)$ es el otro vector director de π $\longrightarrow$ $\boxed{\text{p1}}$

$\boxed{\text{p4}}$ Pasa por el punto $A(A_x, A_y, A_z)$ $[A \in \pi]$
Perpendicular a la recta r de vector director $\vec{u}$

El vector normal al plano es $\vec{n} \parallel \vec{u}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\text{p1.2}}$

Si la recta r es perpendicular al plano π, el vector director $\vec{u}$ de la recta r es un vector normal (perpendicular) al plano.

$\boxed{\text{p5}}$ Pasa por el punto $A(A_x, A_y, A_z)$
Paralelo al plano $\pi' \equiv a'x + b'y + c'z + d' = 0$

El vector normal al plano es $\vec{n} \parallel \vec{n}'$ $\longrightarrow$ $\boxed{\text{p1.2}}$

Si los planos π y π' son paralelos, sus vectores normales $\vec{n}$ y $\vec{n}\,'$ también son paralelos.

$\boxed{\text{p6}}$ Pasa por el punto $A(A_x, A_y, A_z)$
Paralelo a la recta r de vector director $\vec{u}$
Paralelo a la recta s de vector director $\vec{v}$

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, directores de las rectas r y s son también paralelos al plano π, vectores directores del plano $\longrightarrow$ $\boxed{\text{p1}}$

$\boxed{\text{p7}}$ Paralelo a la recta r de vector director $\vec{u}$
Contiene a la recta s de vector director $\vec{v}$

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, directores de las rectas r y s son también paralelos al plano π, vectores directores del plano.

Cualquier punto A de la recta s también es del plano π $\longrightarrow$ $\boxed{\text{p1}}$

$\boxed{\text{p8}}$ Pasa por el punto $A(A_x, A_y, A_z)$
Perpendicular al plano π' de vector normal $\vec{n}\,'$
Paralelo a la recta r de vector director $\vec{u}$

El vector $\vec{u}$ director de la recta r y el vector $\vec{n}\,'$ normal al plano π' son también paralalos al plano π, vectores directores del plano $\longrightarrow$ $\boxed{\text{p1}}$

$\boxed{\text{p9}}$ Perpendicular al plano π' de vector normal $\vec{n}\,'$
Contiene a la recta r de vector director $\vec{u}$

El vector $\vec{u}$ director de la recta r y el vector $\vec{n}\,'$ normal al plano π' son también paralalos al plano π, vectores directores del plano.

Cualquier punto A de la recta r también es del plano π $\longrightarrow$ $\boxed{\text{p1}}$

Puntos de intersección

$\boxed{\text{i1}}$ De la recta r dada en ecuaciones paramétricas.
Con la recta s dada en ecuaciones paramétricas.

Resolvemos el sistema de 6 ecuaciones (3 de r y 3 de s) con 5 incógnitas (x, y, z, λ, μ).
Por igualación de dos de las tres ecuaciones de r y s, hallamos λ y μ $\Rightarrow$ encontramos (x, y, z).
Debe verificarse en la tercera ecuación de r y s.

$\boxed{\text{i2.1}}$ De la recta r dada en ecuaciones paramétricas.
Con la recta s dada en ecuaciones implícitas.

Resolvemos el sistema de 5 ecuaciones (3 de r y 2 de s) con 4 incógnitas (x, y, z, λ).
Por substitución de las 3 ecuaciones de r en una de s, hallamos λ $\Rightarrow$ encontramos (x, y, z).
Deber verificarse en la otra ecuación de s

$\boxed{\text{i2.2}}$ De la recta r dada en ecuaciones paramétricas.
Con la recta s dada en ecuaciones implícitas.

Escribimos s en forma de ecuaciones paramétricas $\longrightarrow$ $\boxed{\text{i1}}$

$\boxed{\text{i3.1}}$ De la recta r dada en ecuaciones implícitas.
Con la recta s dada en ecuaciones implícitas.

Resolvemos el sistema de 4 ecuaciones (2 de r y 2 de s) con tres incógnitas (x, y, z).
Por matriz inversa, Cramer, Gauss, etc de 3 de las ecuaciones del sistema, hallamos (x, y, z).
Debe verificarse en la cuarta ecuaciónd del sistema.

$\boxed{\text{i3.2}}$ De la recta r dada en ecuaciones implícitas.
Con la recta s dada en ecuaciones implícitas.

Escribimos r en forma de ecuaciones paramétricas $\longrightarrow$ $\boxed{\text{i2}}$

$\boxed{\text{i4}}$ De la recta r en forma de ecuación continua.
Con la recta s en forma de ecuación continua.

Hallando las ecuaciones paramétricas de r y s $\longrightarrow$ $\boxed{\text{i1}}$

Hallando las ecuaciones paramétricas de r y las implícitas de s $\longrightarrow$ $\boxed{\text{i2}}$

Hallando las ecuaciones implícitas de r y s $\longrightarrow$ $\boxed{\text{i3}}$

$\boxed{\text{i5}}$ De la recta r dada en ecuaciones paramétricas.
Con el plano π en forma implícita.

Resolvemos el sistema de 4 ecuaciones (3 de r y 1 de π) con cuatro incógnitas (x, y, z, λ).
Por substitución de las 3 ecuaciones de r en la de π, hallamos λ $\Rightarrow$ encontramos (x, y, z)

$\boxed{\text{i6.1}}$ De la recta r dada en ecuaciones implícitas.
Con el plano π en forma implícita.

Resolvemos el sistema de 3 ecuaciones (2 de r y 1 de π) con tres incógnitas (x, y, z).
Por matriz inversa, Cramer, Gauss, etc, hallamos (x, y, z).

$\boxed{\text{i6.2}}$ De la recta r dada en ecuaciones implícitas.
Con el plano π en forma implícita.

Hallando las ecuaciones paramétricas de r $\longrightarrow$ $\boxed{\text{i5}}$

$\boxed{\text{i7}}$ De la recta r dada en ecuación continua.
Con el plano π en forma implícita.

Hallando las ecuaciones paramétricas de r $\longrightarrow$ $\boxed{\text{i5}}$

Hallando las ecuaciones implícitas de r $\longrightarrow$ $\boxed{\text{i6}}$

$\boxed{\text{i7}}$ De tres planos π_1, π_2 y π_3

Resolvemos el sistema de 3 ecuaciones (1 de cada plano) con tres incógnitas (x, y, z).
Por matriz inversa, Cramer, Gauss, etc, hallamos (x, y, z).

Punto A' simétrico de A

$\boxed{\text{s1}}$ Respecto del plano $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$

Encontramos la recta r perpedicular al plano π que pasa por $A \quad \longrightarrow \quad \boxed{\text{r3}}$

Encontramos el punto M de intersección de la recta r con el plano $\pi \quad \longrightarrow \quad \boxed{\text{i5}}$

M es el punto medio de la simetría AA' : $M = \dfrac{A + A'}{2} \Rightarrow A' = 2M - A$

$\boxed{\text{S2.1}}$ Respecto de la recta r

Hallamos las ecuaciones paramátricas de r. Sea $P(x, y, z)$ un punto genérico de la recta r.

Si los vectores $\vec{u}$ y $\overrightarrow{AP}$ son perpendiculares, entonces $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \Rightarrow$ hallamos el valor de λ

Para el que $P = M$, punto medio de la simetría AA' : $M = \dfrac{A + A'}{2} \Rightarrow A' = 2M - A$

$\boxed{\text{S2.2}}$ Respecto de la recta r.

Hallamos $\vec{u}$ vector director de r de las ecuaciones paramétricas, o de las implícitas $\quad \longrightarrow \quad \boxed{\text{r4.2}}$

Hallamos la ecuación del plano π perpendicular a r que pasa por $A \quad \longrightarrow \quad \boxed{\text{p4}}$

Hallamos el punto de intersección de la recta r y el plano $\pi \quad \longrightarrow \quad \boxed{\text{i5,i6,i7}}$

Que es M, el punto medio de la simetría AA' : $M = \dfrac{A + A'}{2} \Rightarrow A' = 2M - A$